

文章编号: 1000-8055(2006)05-0874-05

平均应力及其分散性对结构振动可靠性的影响

陈立伟, 王延荣

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

摘 要: 基于传统的结构振动分析, 利用 Goodman 曲线和应力-强度干涉理论, 将结构的平均应力及其分散性的影响引入结构振动可靠性模型。结合其它相关参数的分散性, 分别建立了平均应力为定值和随机变量时的结构振动可靠性模型, 给出了可靠度计算的相应表达式及分析流程。计算实例与 Monte Carlo 仿真比较, 表明该模型合理可行, 计算结果表明, 平均应力及其分散性的增加使得可靠度降低。

关 键 词: 航空、航天推进系统; 结构振动; 可靠性; 平均应力; 疲劳强度

中图分类号: V231.9

文献标识码: A

Effects of mean stress and its scatter on vibrational reliability of structures

Chen Liwei, Wang Yanrong

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Based on traditional structural vibration analysis, the effects of mean stress and its scatter have been introduced into the vibrational reliability model of structures by use of Goodman curve and the interference theory of stress and strength. Combined with other relative parameters' scatter, the vibrational reliability model has been established separately while considering mean stress to be deterministic and stochastic, and the corresponding formulations and procedures for reliability computation have been presented. Compared with Monte Carlo simulation, the numerical results indicate that the model proposed in this paper is reasonable and feasible, meanwhile they also indicate that reliability decreased as the mean stress and/or its scatter increased.

Key words: aerospace propulsion system; structural vibration; reliability; mean stress; fatigue strength

结构的疲劳失效中有相当大一部分是由其强迫振动导致的。以航空发动机中的叶片故障为例, 统计资料表明, 振动故障率占发动机总故障率

的 60% 以上, 而叶片故障又占振动故障的 70% 以上^[1], 这足以显示叶片振动的危害程度。因此, 要求设计者尽可能使叶片在正常工作中避开危险的

收稿日期: 2005-08-07; 修订日期: 2006-01-11

作者简介: 陈立伟(1981-), 男, 河北滦州人, 北京航空航天大学能源与动力工程学院硕士生, 主要从事航空发动机结构振动可靠性研究。

强迫共振,并能回答叶片在给定的寿命期间(或循环次数)多大程度上是安全的。显然传统的设计方法在这一问题面前是无能为力的。传统的振动设计以是否发生共振作为结构振动失效的准则,但是有些结构工作过程中并没有发生共振而失效,另一些结构在共振状态却能安全工作,这说明仅以共振来作为振动可靠性的评定标准是不全面的。文献[2-4]中,从振动响应放大因子 β 角度对固有频率和激振力频率的分散性进行分析,其中,文献[3]以振动响应放大因子 β 小于某个临界值 β_c 的概率为条件建立了频率干涉模型,这不同于一般意义上的避开共振的可靠性设计^[5,6],因为后者避开共振的概率的物理意义为固有频率大于或小于激振力频率的概率,并不能作为结构振动可靠度。文献[7]在文献[3]基础上考虑了构件疲劳强度和激振力幅值的分散性,利用振动应力-疲劳强度干涉理论,建立了结构振动可靠性模型,使结构振动可靠性设计方法有了进一步发展,其工程应用在文献[8]中得以体现。但上述模型未考虑平均应力及其分散性的影响,对于实际结构,如涡轮机械转子叶片,其质量离心力和气体力引起的平均应力对叶片振动可靠性是有影响的;同时,离心力和气体力的分散性或周期性使得平均应力带有分散性,因此,在结构振动可靠性分析中有必要对平均应力及其分散性的影响进行分析和讨论。结合其它相关参数(固有频率、激振力频率、激振力幅值和对称循环疲劳强度)的分散性,本文首先将平均应力视为定值来建立振动可靠性模型,并在此基础上考虑其分散性建立了相应的结构振动可靠性模型。

1 平均应力为定值的结构振动可靠性模型

对于构件的某一阶固有模态或单自由度系统,其稳态强迫振动响应的放大因子为:

$$\beta = 1 / \sqrt{(1 - \lambda)^2 + (2\zeta\lambda)^2} \quad (1)$$

式中: $\lambda = \omega_k / \omega$ 为激振力频率与固有频率之比, ζ 为临界阻尼比。

假设构件的固有频率 ω 、激振力频率 ω_k 和激振力幅值 F_0 为相互独立的随机变量,其概率密度函数分别为 $g(\omega)$ 、 $g_e(\omega_k)$ 和 $f_{F_0}(F_0)$,这样振动应力 $s = k\beta F_0$ 也具有分散性^[7]。当构件的平均应力 σ_m 和对称循环的疲劳强度 σ_{-1} 一定时,可由其Goodman曲线 $\sigma_k / \sigma_{-1} + \sigma_m / \sigma_k = 1$ 确定疲劳强度幅值 $\sigma_k = \sigma_{-1}(1 - \sigma_m / \sigma_k)$,其中静拉伸强度 σ_k 为定

值。当大于上述 σ_k 时,结构破坏;反之,结构安全。于是,可将 σ_k 定义为振动应力的一个临界值 s_c ,即 $s_c = \sigma_k$ 。对于 F_0 某一给定的无穷小取值区间 $(F_0^*, F_0^* + dF_0)$,由 s_c 可以确定 β 的一个临界值 $\beta_c = s_c / kF_0^*$,应用频率干涉模型^[7], β 小于 β_c 的概率值即为构件强迫振动的可靠度。带有分散性的 F_0 在 F_0^* 和 $F_0^* + dF_0$ 之间取值的概率是 $f_{F_0}(F_0^*)dF_0$,由于 F_0 与 ω 和 ω_k 相互独立,因此构件强迫振动的可靠度可表示为 σ_m 、 σ_{-1} 、 F_0 、 ω_k 和 ω 的函数:

$$R(\sigma_m, \sigma_{-1}, F_0, \omega_k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{F_0}(F_0) \cdot \{1 - \int_{-\infty}^{\infty} g_e(\omega_k) [\int_{\omega_{c1}}^{\omega_{c2}} g(\omega) d\omega] d\omega_k\} dF_0 \quad (2)$$

式中: ω_{c1} 、 ω_{c2} 是依赖于 σ_m 和 σ_{-1} 的 F_0 和 ω_k 的函数,即对于给定的 σ_m 和 σ_{-1} ,有一个 s_c 与之对应;对于 s_c 给定不同的 F_0 ,有不同的 β_c 与之对应;对于不同的 β_c ,给定不同的 ω ,有不同的 ω_{c1} 和 ω_{c2} 与之对应。

现假设构件对称循环的疲劳强度 σ_{-1} 带有分散性,且其概率密度函数为 $f(\sigma_{-1})$ 。对于 σ_{-1} 某一给定的无穷小取值区间 $(\sigma_{-1}^*, \sigma_{-1}^* + d\sigma_{-1})$,振动应力的临界值可表示为 $s_c = \sigma_{-1}^* (1 - \sigma_m / \sigma_k)$,则构件强迫振动的可靠度可以表示为 σ_m 、 σ_{-1}^* 、 F_0 、 ω_k 和 ω 的函数:

$$R(\sigma_m, \sigma_{-1}^*, F_0, \omega_k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{F_0}(F_0) \cdot \{1 - \int_{-\infty}^{\infty} g_e(\omega_k) [\int_{\omega_{c1}}^{\omega_{c2}} g(\omega) d\omega] d\omega_k\} dF_0 \quad (3)$$

式中: ω_{c1} 、 ω_{c2} 是依赖于 σ_m 和 σ_{-1}^* 的 F_0 和 ω_k 的函数,即对于给定的 σ_m 和 σ_{-1}^* ,有一个 s_c 与之对应;对于 s_c 给定不同的 F_0 ,有不同的 β_c 与之对应;对于不同的 β_c ,给定不同的 ω_k ,有不同的 ω_{c1} 和 ω_{c2} 与之对应。

而带有分散性的随机变量 σ_{-1} 在 σ_{-1}^* 和 $\sigma_{-1}^* + d\sigma_{-1}$ 之间取值的概率为 $f(\sigma_{-1}^*)d\sigma_{-1}$,由于 σ_{-1} 与 F_0 、 ω_k 和 ω 是相互独立的,因此构件强迫振动的可靠度可以表示为 σ_m 、 σ_{-1} 、 F_0 、 ω_k 和 ω 的函数:

$$R(\sigma_m, \sigma_{-1}, F_0, \omega_k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma_{-1}) \{ \int_{-\infty}^{\infty} f_{F_0}(F_0) \cdot \{1 - \int_{-\infty}^{\infty} g_e(\omega_k) [\int_{\omega_{c1}}^{\omega_{c2}} g(\omega) d\omega] d\omega_k\} dF_0 \} d\sigma_{-1} \quad (4)$$

式中: ω_{c1} 、 ω_{c2} 是依赖于 σ_m 的 σ_{-1} 、 F_0 和 ω_k 的函数,即对于给定的 σ_m ,给定不同的 σ_{-1} ,有不同的

s_G 与之对应; 对于不同的 s_G , 给定不同的 F_0 , 有不同的 β_G 与之对应; 对于不同的 β_G , 给定不同的 ω_k , 有不同的 ω_{k1} 和 ω_{k2} 与之对应。

2 平均应力带有分散性的结构振动可靠性模型

在上述平均应力为定值的结构振动可靠性模型基础上, 现将构件的平均应力 σ_m 视为带有分散性的随机变量, 其概率密度函数为 $f(\sigma_m)$, 并假设 σ_m 与 σ_1 、 F_0 、 ω_k 和 ω 是相互独立的。对于 ω_m 某一给定的无穷小取值区间 $(\sigma_m^*, \sigma_m^* + d\sigma_m)$, 构件强迫振动的可靠度可以表示为 σ_m^* 、 σ_1 、 F_0 、 ω_k 和 ω 的函数:

$$R(\sigma_m^*, \sigma_1, F_0, \omega_k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma_1) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_{F_0}(F_0) \cdot \left\{ 1 - \int_{-\infty}^{\infty} g_e(\omega_k) \left[\int_{\omega_{e1}}^{\omega_{e2}} g(\omega) d\omega \right] d\omega_k \right\} dF_0 \right\} d\sigma_1 \quad (5)$$

式中: ω_{k1} 、 ω_{k2} 是依赖于 σ_1 的 σ_m^* 、 F_0 和 ω_k 的函数, 即对于给定的 σ_m^* , 给定不同的 σ_1 , 有不同的 s_G 与之对应; 对于不同的 s_G , 给定不同的 F_0 , 有不同的 β_G 与之对应; 对于不同的 β_G , 给定不同的 ω_k , 有不同的 ω_{k1} 和 ω_{k2} 与之对应。

而带有分散性的随机变量 σ_m 在 σ_m^* 和 $\sigma_m^* + d\sigma_m$ 之间取值的概率为 $f(\sigma_m^*) d\sigma_m$, 由于 σ_m 与 σ_1 、 F_0 、 ω_k 和 ω 是相互独立的, 因此构件强迫振动的可靠度可以表示为 σ_m 、 σ_1 、 F_0 、 ω_k 和 ω 的函数:

$$R(\sigma_m, \sigma_1, F_0, \omega_k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma_m) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma_1) \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_{F_0}(F_0) \left\{ 1 - \int_{-\infty}^{\infty} g_e(\omega_k) \cdot \left[\int_{\omega_{e1}}^{\omega_{e2}} g(\omega) d\omega \right] d\omega_k \right\} dF_0 \right\} d\sigma_1 \right\} d\sigma_m \quad (6)$$

式中: ω_{k1} 、 ω_{k2} 是 σ_m 、 σ_1 、 F_0 和 ω_k 的函数, 即给定不同的 σ_m 和 σ_1 , 有不同的 s_G 与之对应; 对于不同的 s_G , 给定不同的 F_0 , 有不同的 β_G 与之对应; 对于不同的 β_G , 给定不同的 ω_k , 有不同的 ω_{k1} 和 ω_{k2} 与之对应。

需要说明的是, 上述模型中认为构件的平均应力 σ_m 小于其静拉伸强度 σ_b (σ_m 与 σ_b 不干涉, 即 σ_m 小于 σ_b 的概率是 1); 另外, 上述表达式中用正、负无穷作为积分限是为了表示计算是在相应的随机变量的整个分布域内进行的, 实际计算中的积分上、下限可用有实际意义的值替代正、负无穷。

至此, 结构振动可靠性模型中, 随机变量涉及到 5 个, 分别为: 固有频率 ω , 激振力频率 ω_k , 激振力幅值 F_0 、平均应力 σ_m 和对称循环的疲劳强度 σ_1 。文中假设这 5 个随机变量之间是相互独立的, 通常实际结构可认为满足这一假设。

具体到某一实际结构的振动可靠性分析, 现给出具体分析流程: 首先, 通过试验或有限元分析, 确定结构的固有频率 ω 和平均应力 σ_m , 并根据其统计特性确定相应的概率密度函数; 其次, 通过试验或有关经验, 确定所考察模态的临界阻尼比 ξ ; 然后, 通过试验, 由激振力的统计特性, 分别确定激振力频率 ω_k 和幅值 F_0 的概率密度函数, 同时, 确定结构振动应力表达式 $s = k\beta F_0$ 中的系数 k ; 之后, 由材料的疲劳试验或直接查阅材料数据手册确定材料的对称循环疲劳强度 σ_1 的概率密度函数, 由材料的静强度试验或直接查阅材料数据手册确定材料的静拉伸强度 σ_b ; 最后, 可由本文模型计算出结构振动可靠度 R 。

3 算例

针对上述结构振动可靠性模型, 编制了计算程序。现以某一结构为例^[7], 设其给定阶模态的临界阻尼比 $\xi = 0.01$, 振动应力表达式 $s = k\beta F_0$ 中的系数 $k = 5.0 \text{ MPa/N}$, 激振力幅值 F_0 服从威布尔分布 $W(2.0, 0.2, 3) \text{ N}$, 对称循环的疲劳强度 σ_1 服从威布尔分布 $W(200, 20, 3) \text{ MPa}$, 静拉伸强度 $\sigma_b = 600 \text{ MPa}$, 考虑平均应力 σ_m 及其分散性的影响, 计算得到了相应的可靠度值, 并给出了相同条件下 Monte Carlo 仿真结果及两者间的相对误差, 见表 1~ 表 3 (其中, N 、 W 分别表示正态分布和威布尔分布, R_1 为根据本文模型编制的程序计算结果, R_2 为 100 000 次 Monte Carlo 仿真结果, $\Delta R = (R_1 - R_2) / R_2$ 为两者间的相对误差)。

由表 1~ 表 3 可以看出, 根据本文模型编制的计算程序所得计算结果与 Monte Carlo 仿真结果吻合较好, 相对误差(绝对值)的最大值为 0.471 254%, 这表明了本文提出的结构振动可靠性模型的合理性。下面对程序计算结果作进一步分析。

由表 1、表 2 可以得出这样的结论: 平均应力对结构振动的可靠度是有影响的, 以激振力频率和固有频率均服从正态分布 $N(520, 10) \text{ Hz}$ 为例, 平均应力分别为 0, 50 和 100 MPa 时, 相对应的振动可靠度分别为 0.399 208, 0.350 596 和 0.298 195, 表现为随平均应力的增加, 可靠度降

低。对于其它的频率分布形式,可靠度随平均应力的变化规律亦是如此。

由表 2、表 3 可以得出这样的结论: 平均应力的分散性对结构振动的可靠度是有影响的,以激

振力频率和固有频率均服从正态分布 $N(520, 10)$ Hz 为例,当平均应力服从均值为 100 MPa 的正态分布,标准差分别为 0、10 和 15 MPa 时,对应的振动可靠度分别为 0.298 195、0.298 125 和

表 1 不计平均应力时的结构振动可靠度

Table 1 Vibrational reliability of structures without mean stress

频率分布/Hz		可靠度		相对误差
激振频率	固有频率	R_1	R_2	$\Delta R/\%$
$N(520, 10)$	$N(520, 10)$	0.399 208	0.400 160	- 0.237 905
$N(520, 10)$	$N(530, 10)$	0.495 618	0.496 020	- 0.081 045
$N(520, 10)$	$N(540, 10)$	0.714 034	0.715 740	- 0.238 355
$N(520, 10)$	$N(550, 10)$	0.891 598	0.891 310	0.032 312
$N(520, 10)$	$N(560, 10)$	0.972 859	0.973 110	- 0.025 794
$N(520, 10)$	$N(570, 10)$	0.995 457	0.995 490	- 0.003 315
$N(500, 10)$	$W(540, 30, 3)$	0.999 782	0.999 970	- 0.018 801
$N(520, 10)$	$W(540, 30, 3)$	0.993 665	0.993 800	- 0.013 584
$N(540, 10)$	$W(540, 30, 3)$	0.837 147	0.835 800	0.161 163
$W(540, 30, 3)$	$N(520, 10)$	0.994 545	0.994 580	- 0.003 519
$W(540, 30, 3)$	$W(540, 30, 3)$	0.351 780	0.350 130	0.471 254
$W(520, 30, 3)$	$W(540, 30, 3)$	0.696 234	0.696 640	- 0.058 280

表 2 计入平均应力时的结构振动可靠度

Table 2 Vibrational reliability of structures with mean stress

频率分布/Hz		平均应力 50MPa			平均应力 100MPa		
激振频率	固有频率	R_1	R_2	$\Delta R/\%$	R_1	R_2	$\Delta R/\%$
$N(520, 10)$	$N(520, 10)$	0.350 596	0.350 050	0.155 978	0.298 195	0.298 850	- 0.219 173
$N(520, 10)$	$N(530, 10)$	0.448 267	0.449 270	- 0.223 251	0.394 995	0.394 200	0.201 674
$N(520, 10)$	$N(540, 10)$	0.677 072	0.676 730	0.050 537	0.631 836	0.630 620	0.192 826
$N(520, 10)$	$N(550, 10)$	0.871 697	0.872 690	- 0.113 786	0.845 163	0.846 000	- 0.098 936
$N(520, 10)$	$N(560, 10)$	0.966 020	0.966 630	- 0.063 106	0.956 124	0.955 730	0.041 225
$N(520, 10)$	$N(570, 10)$	0.993 996	0.994 020	- 0.002 414	0.991 705	0.991 510	0.019 667
$N(500, 10)$	$W(540, 30, 3)$	0.999 771	0.999 980	- 0.020 900	0.999 749	0.999 980	- 0.023 100
$N(520, 10)$	$W(540, 30, 3)$	0.991 451	0.991 400	0.005 144	0.987 957	0.988 250	- 0.029 648
$N(540, 10)$	$W(540, 30, 3)$	0.809 498	0.810 820	- 0.163 045	0.773 592	0.773 410	0.023 532
$W(540, 30, 3)$	$N(520, 10)$	0.992 805	0.993 000	- 0.019 637	0.990 143	0.990 580	- 0.044 116
$W(540, 30, 3)$	$W(540, 30, 3)$	0.301 858	0.301 060	0.265 063	0.249 001	0.249 600	- 0.239 984
$W(520, 30, 3)$	$W(540, 30, 3)$	0.656 890	0.658 250	- 0.206 608	0.608 845	0.608 790	0.009 034

表 3 σ_m 服从正态分布时的结构振动可靠度

Table 3 Vibrational reliability of structures while mean stress obeys normal distribution

频率分布/Hz		平均应力 $N(100, 10)$ MPa			平均应力 $N(100, 15)$ MPa		
激振频率	固有频率	R_1	R_2	$\Delta R/\%$	R_1	R_2	$\Delta R/\%$
$N(520, 10)$	$N(520, 10)$	0.298 125	0.297 300	0.277 497	0.298 038	0.299 210	- 0.391 698
$N(520, 10)$	$N(530, 10)$	0.394 861	0.395 130	- 0.068 079	0.394 695	0.396 460	- 0.445 190
$N(520, 10)$	$N(540, 10)$	0.631 615	0.630 650	0.153 017	0.631 339	0.630 200	0.180 736
$N(520, 10)$	$N(550, 10)$	0.844 966	0.844 220	0.088 366	0.844 719	0.845 070	- 0.041 535
$N(520, 10)$	$N(560, 10)$	0.956 024	0.956 210	- 0.019 452	0.955 899	0.954 820	0.113 006
$N(520, 10)$	$N(570, 10)$	0.991 675	0.991 870	- 0.019 660	0.991 637	0.992 040	- 0.040 623
$N(500, 10)$	$W(540, 30, 3)$	0.999 748	0.999 920	- 0.017 201	0.999 748	0.999 960	- 0.021 201
$N(520, 10)$	$W(540, 30, 3)$	0.987 911	0.988 200	- 0.029 245	0.987 854	0.988 120	- 0.026 920
$N(540, 10)$	$W(540, 30, 3)$	0.773 357	0.774 020	- 0.085 657	0.773 062	0.773 530	- 0.060 502
$W(540, 30, 3)$	$N(520, 10)$	0.990 111	0.989 590	0.052 648	0.990 071	0.990 500	- 0.043 311
$W(540, 30, 3)$	$W(540, 30, 3)$	0.248 957	0.248 890	0.026 920	0.248 903	0.248 600	0.121 883
$W(520, 30, 3)$	$W(540, 30, 3)$	0.608 615	0.607 510	0.181 890	0.608 327	0.607 270	0.174 058

0.298 038, 表现为随平均应力分散性的增加, 可靠度降低。对于其它的频率分布形式, 可靠度随平均应力的变化规律亦是如此。

4 结 论

本文发展了结构振动可靠性模型, 其中考虑了平均应力及其分散性的影响, 并给出了相应的计算表达式, 编制了相应的计算程序, 利用所编制的程序进行了算例分析, 同时给出了相同条件下 Monte Carlo 仿真结果。比较程序计算结果与 Monte Carlo 仿真结果间的相对误差发现两者吻合较好(相对误差的绝对值的最大值为 0.471 254%), 这表明了本文所建立的模型的合理性和数值计算的可行性。同时计算实例表明, 平均应力及其分散性对结构振动可靠性是有影响的, 随着平均应力的增加, 可靠度降低; 随着其分散性的增加, 可靠度亦降低。

参考文献:

[1] 宋兆泓主编. 航空发动机典型故障分析[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1993.
Song Zhaohong. Typical failure analysis of aeroengine[M]. Beijing, Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1993.

[2] 吕震宙, 冯元生. 工程结构振动可靠性分析方法初探[J]. 机械强度, 1993, 15(2): 1-6.
Lu Zhenzhou, Feng Yuansheng. A Preliminary analysis

method for reliability of structural vibration[J]. Journal of Mechanical Strength, 1993, 15(2): 1-6.

[3] 田爱梅, 王延荣. 构件振动可靠性设计方法初探[J]. 航空动力学报, 1999, 14(3): 320-322.
Tian Aimei, Wang Yanrong. Preliminary research on reliability design method of mechanical component vibration[J]. Journal of Aerospace Power, 1999, 14(3): 320-322.

[4] Mark A Cesare, Robert H Sues, Y-T (Justin) Wu. Probabilistic high cycle fatigue (HCF) of jet engine blades[R]. AIAA-2001-1379.

[5] 史进渊, 林振坤, 龚汉声. 透平机械零件振动的可靠性设计[J]. 航空动力学报, 1995, 10(3): 263-266.
Shi Jinyuan, Lin Zhenkun, Gong Hansheng. Reliability design of turbine part vibration[J]. Journal of Aerospace Power, 1995, 10(3): 263-266.

[6] 欧阳德, 孔瑞莲, 宋兆泓. 叶片振动可靠性评估方法研究[J]. 航空动力学报, 1998, 13(2): 161-164.
Ou Yangde, Kong Ruilian, Song Zhaohong. An assessment method for blade vibration reliability[J]. Journal of Aerospace Power, 1998, 13(2): 161-164.

[7] 王延荣, 田爱梅. 结构振动可靠性设计方法研究[J]. 航空动力学报, 2003, 18(2): 191-194.
Wang Yanrong, Tian Aimei. Research on reliability design method of structural vibration[J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(2): 191-194.

[8] 李宏新. 某型机带凸肩风扇叶片断裂故障研究与振动可靠性评估[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2000.
Li Hongxin. Research on fault of fan blade with mid span shrouds in a turbofan engine and estimation of vibration reliability[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2000.